

**Методические рекомендации.
11 класс «СОШ № 57 подразделение ВСОШ»**

Вашему вниманию предложены следующие темы:

- I. Преобразования степенных, иррациональных и логарифмических выражений.**
- II. Иррациональные, показательные и логарифмические уравнения.**
- III. Показательные и логарифмические неравенства.**
- IV. Дробно-рациональные неравенства (метод интервалов).**
- V. Применение производной.**

После того как вы познакомитесь с теорией необходимо выполнить по каждой теме контрольную работу.

Степенные выражения

Определения и свойства степени	Примеры
Определения: 1) $a^1 = a \quad (a \in \mathbb{R})$ 2) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0)$ 3) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0, a \in \mathbb{R})$ 4) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$ 5) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Q}, a > 0)$	$(-1,76)^1 = -1,76$ $(-1,76)^3 = (-1,76) \cdot (-1,76) \cdot (-1,76) = -4,913$ $(-1,76)^0 = 1, \text{ если } 6 \neq 0$ $(-0,25)^{-3} = \frac{1}{(-0,25)^3} = (-4)^3 = 64$ $0,25^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{0,25^{-3}} = \sqrt{\frac{1}{0,25^3}} = \sqrt{64} = 8$
Свойства:	Примеры
1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ 2. $(a^x)^y = a^{xy}$ 3. $a^x : a^y = a^{x-y}$ 4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ 5. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$m^{1,5} \cdot m^{-2} = m^{1,5+(-2)} = m^{-0,5}$ $1,5^{3x} \cdot 1,5^{-0,5x} = 1,5^{2,5x}$ $\left(0,25^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = (0,25)^{-2} = 4^2 = 16$ $(5^x)^2 = 5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$ $m^{1,5} : m^{-2} = m^{1,5-(-2)} = m^{3,5}$ $1,5^{3x} : 1,5^{-0,5x} = 1,5^{3,5x}$ $3^{2x} \cdot 5^{2x} = (3 \cdot 5)^{2x} = 15^{2x}$ $\left(\frac{6m}{n}\right)^4 \cdot \left(\frac{n}{2m}\right)^4 = \left(\frac{6m}{n} \cdot \frac{n}{2m}\right)^4 = 3^4 = 81$
Свойства арифметических корней n-степени	Примеры
1) Если $a \geq 0, b \geq 0$. то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{125 \cdot 8} = \sqrt[3]{125} \cdot \sqrt[3]{8} = 5 \cdot 2 = 10$ $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16} = \sqrt[5]{32} = 2$
2) Если $a \geq 0, b > 0$. то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \frac{2}{3}$ $\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$
3) Если $a \geq 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, то $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}} = \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{a}$ $-3\sqrt[3]{\sqrt{a}} = -3\sqrt[6]{a} = -2\sqrt[6]{a}$
4) Если $a \geq 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, то $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$	$\sqrt[5]{32^3} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^3 = 2^3 = 8$
5) Если $a \geq 0, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, то $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a^k}\right)$	$\sqrt[15]{a^5} - 9\sqrt[12]{a^4} + 3\sqrt[9]{a^3} = 2\sqrt[3]{a} - 9\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} = -4\sqrt[3]{a}$

Преобразования степенных и иррациональных выражений

Пример 1. Вычислите: $4 \cdot 81^{\frac{1}{4}} + 0,5^0$.

Решение.

Первый способ. Используя определения степени с нулевым и дробным показателями,

получаем: $4 \cdot 81^{\frac{1}{4}} + 0,5^0 = 4 \cdot \sqrt[4]{81} + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$.

Второй способ. Используя определения степени с натуральным и нулевым показателями и

свойства степеней, получаем: $4 \cdot 81^{\frac{1}{4}} + 0,5^0 = 4 \cdot (3^4)^{\frac{1}{4}} + 1 = 4 \cdot 3^{\frac{4 \cdot 1}{4}} + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$

Ответ 13.

Пример 2. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24}$.

Решение. Учитывая, что $81 = 27 \cdot 3$, а $24 = 8 \cdot 3$, и используя формулу $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,

получим: $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} - 7 \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 3} =$

$3 \cdot \sqrt[3]{3} - 7 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[3]{3} - 14 \cdot \sqrt[3]{3} = -11\sqrt[3]{3}$

Ответ: $-11\sqrt[3]{3}$.

Пример 3. Упростите выражение $\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}}$.

Решение. $\sqrt{125} \cdot \sqrt[5]{32} - 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25 \cdot 5} \cdot \sqrt[5]{32} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{32} - \sqrt{5} = 5\sqrt{5} \cdot 2 - \sqrt{5} =$

$10\sqrt{5} - \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$

Ответ: $9\sqrt{5}$

Пример 4. Выполните действия: $(a^{\frac{3}{4}})^2 \sqrt[3]{a^2}$.

Решение. Используя определение степени с дробным показателем $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Q}$, $a > 0$), а также свойства степеней $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, получаем:

$$(a^{\frac{3}{4}})^2 \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{3}{4} \cdot 2} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}} = a^{\frac{13}{6}}$$

Ответ: $a^{\frac{13}{6}}$

Пример 5. Выполните действия: $\frac{\left(\frac{5}{x^8}\right)^4}{\sqrt[3]{x^4}}$

Решение. $\frac{\left(\frac{5}{x^8}\right)^4}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{\left(\frac{5}{x^8}\right)^4}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{5}{2} - \frac{4}{3}} = x^{\frac{7}{6}}$

Ответ: $x^{\frac{7}{6}}$.

Пример 6. Упростите выражение $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3}$

Решение. $\sqrt[4]{27a} \cdot \sqrt[4]{3a^3} = \sqrt[4]{3^3 \cdot a \cdot 3 \cdot a^3} = \sqrt[4]{3^4 \cdot a^4} = \sqrt[4]{(3a)^4} = 3a$

Ответ: $3a$.

Иррациональные уравнения

Иррациональные уравнения, встречающиеся на экзамене, чаще всего решаются методом возведения в степень, которую имеет корень, содержащий неизвестное, или заменой неизвестного. Не следует забывать, что в степень возводятся обе части уравнения.

Так как при возведении в степень обеих частей уравнения новое, получившееся после этой операции уравнение, не всегда равносильно искомому, то нужно либо делать проверку, либо с самого начала выписывать неравенства, задающие область допустимых значений неизвестной величины. При осуществлении проверки значение неизвестной являющееся решением необходимо подставлять только в первоначальное уравнение, а не в какие-то промежуточные.

Рассмотрим применение некоторых методов решения иррациональных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{5-4x} = 2x + 5$.

Решение. Возведем исходное уравнение $\sqrt{5-4x} = 2x + 5$ в степень, равную показателю корня $(\sqrt{5-4x})^2 = (2x + 5)^2$ $5 - 4x = 4x^2 + 20x + 25$ $4x^2 + 24x + 20 = 0$;
 $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x = -5$ или $x = -1$.

Проверка. $x = -5$: $\sqrt{5-4 \cdot (-5)} = 2 \cdot (-5) + 5$
 $\sqrt{25} = -5$

Это неверное числовое равенство, значит, число -5 не является корнем данного уравнения.

$x = -1$: $\sqrt{5-4 \cdot (-1)} = 2 \cdot (-1) + 5$
 $\sqrt{9} = 3$

Это верное числовое равенство, значит, число -1 является корнем данного уравнения.

Показательные и логарифмические неравенства

Пример 2. Решите неравенство $4^x \geq \frac{1}{2}$

Решение. Так как $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ и $4^x = 2^{2x}$, то исходное неравенство равносильно неравенству $2^{2x} \geq 2^{-1}$. Функция $y = 2^x$ возрастающая, т. к. $2 > 1$. Поэтому полученное неравенство, а значит, и исходное, равносильно неравенству $2x \geq -1$, то есть $x \geq -0,5$.

Ответ: 3.

Пример 3. Найдите число целых отрицательных решений неравенства $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5x-1} \leq 125$.

Решение. Неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5x-1} \leq 125$ равносильно неравенству $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,5x-1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$

Поскольку $\frac{1}{5} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ убывает, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству $0,5x - 1 \geq -3$. Отсюда получаем $x \geq -4$. Целыми отрицательными решениями неравенства являются четыре числа: -4, -3, -2, -1.

Ответ: 4.

Пример 4. Найдите число целых решений неравенства $\log_{0,5}(x - 2) \geq -2$.

Решение. Запишем правую часть неравенства как произведение $-2 \cdot 1$ и воспользуемся тождеством $1 = \log_b a$, при условии $a = 0,5$.

Получим:

$$\begin{aligned} \log_{0,5}(x - 2) \geq -2 \cdot 1; & \quad \log_{0,5}(x - 2) \geq -2 \log_{0,5} 0,5; \\ \log_{0,5}(x - 2) \geq \log_{0,5} 0,5^{-2}; & \quad \log_{0,5}(x - 2) \geq \log_{0,5} 4. \end{aligned}$$

Поскольку $0,5 < 1$, то функция $y = \log_{0,5} x$ убывающая, поэтому полученное неравенство, а значит, и исходное неравенство, равносильно неравенству $0 < x - 2 \leq 4$ (условие $0 < x - 2$ получено с учетом области определения логарифмической функции).

Отсюда получаем $2 < x \leq 6$. Следовательно, x принимает 4 целых значения: 3; 4; 5; 6.
 Ответ: 4.

Пример 5. Решите неравенство $\ln(x-1) < \ln(3x+2)$.

Решение. Т. к. $e > 1$, то функция $y = \ln x$ возрастающая, следовательно, данному неравенству равносильна система неравенств

$$\begin{cases} x-1 < 3x+2, \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > -3 \\ x > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,5 \\ x > 1 \end{cases}$$

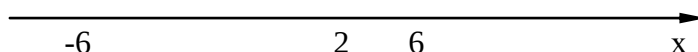
Итак, решения неравенства составляют интервал $(1; +\infty)$

Ответ: $(1; +\infty)$

Дробно-рациональные неравенства (метод интервалов)

Пример 6. Решите неравенство $\frac{3x-6}{(x-6)(x+6)} \leq 0$

Решение. Найдем значения переменной, при которых дробь равна нулю: $3x - 6 = 0$, $x = 2$.
 Найдем значения переменной, при которых дробь не имеет смысла: $(x-6)(x+6) = 0$,
 $x = \pm 6$. Отметим на координатной прямой найденные числа:



На каждом из получившихся промежутков определим знак значений дроби:

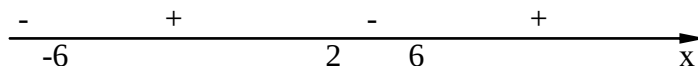
при $x = 7$ имеем $\frac{3 \cdot 7 - 6}{(7-6)(7+6)} > 0$;

при $x = 5$ имеем $\frac{3 \cdot 5 - 6}{(5-6)(5+6)} < 0$

при $x = 0$ имеем $\frac{-6}{-6 \cdot 6} > 0$;

при $x = -7$ имеем $\frac{-3 \cdot 7 - 6}{(-7-6)(-7+6)} < 0$.

Отметим эти данные на рисунке



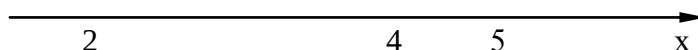
Дробь принимает неположительные значения на промежутках $(-\infty; -6) \cup [2; 6]$

Ответ: $(-\infty; -6) \cup [2; 6]$

Пример 7. Вычислите сумму всех натуральных решений неравенства $\frac{x-2}{(x-5)(3x-12)} \leq 0$

Решение.

$$\begin{aligned} x-2 &= 0, & x &= 2 \\ (x-5)(3x-12) &= 0, & x &= 5 \text{ или } x = 4 \end{aligned}$$

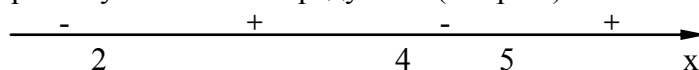


На крайнем правом промежутке дробь принимает положительные значения, т. к.

$$\frac{6-2}{(6-5)(3 \cdot 6-12)} > 0.$$

совпадающих корней у числителя и знаменателя дроби нет, значит, на

полученных промежутках знаки чередуются (см. рис.).



Решением неравенства будет объединение промежутков $(-\infty; 2] \cup (4; 5)$. На этих промежутках находятся два натуральных числа 1 и 2. Сумма этих чисел $1 + 2 = 3$

Ответ: 3.

Определение и свойства логарифмов

Формула	Примеры
1) $\log_a b = x$, означает $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$), т. е. $a^{\log_a b} = b$ основное логарифмическое тождество	$17^{\log_{17} 3} = 3$
2) $\log_a a = 1$, ($a > 0$)	$\log_{143} 143 = 1$,
3) $\log_p 1 = 0$, ($p > 0$, $p \neq 1$)	$\log_{47} 1 = 0$
4) $\log_p ab = \log_p a + \log_p b$ ($p > 0$, $p \neq 1$, $a > 0$, $b > 0$)	$\log_{14} 2 + \log_{14} 7 = \log_{14} (2 \cdot 7) = \log_{14} 14 = 1$
5) $\log_p \frac{a}{b} = \log_p a - \log_p b$	$\log_3 75 - \log_3 25 = \log_3 \frac{75}{25} = \log_3 3 = 1$
6) $\log_p a^n = n \log_p a$ ($a > 0$, $p > 0$, $p \neq 1$)	$\log_3 243 = \log_3 3^5 = 5 \log_3 3 = 5$
7) $\log_p a = \frac{\log_m a}{\log_m p}$ ($a > 0$, $p > 0$, $p \neq 1$, $m > 0$, $m \neq 1$)	$\frac{\log_4 125}{\log_4 5} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3$
8) $\log_{10} a = \lg a$ ($a > 0$) $\log_e a = \ln a$ ($a > 0$)	$\lg 1000 = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$ $\ln e^{-5} = \log_e e^{-5} = -5 \log_e e = -5$

Преобразования логарифмических выражений

Пример 1. Найдите значение выражения $5 \cdot 0,6^{\log_{0,6} 12}$

Решение. В соответствии с основным логарифмическим тождеством $a^{\log_a b} = b$ получаем:

$$5 \cdot 0,6^{\log_{0,6} 12} = 5 \cdot 12 = 60.$$

Ответ: 60

Пример 2. Упростите выражение $\log_3 15 - \log_3 5 + 3 \cdot 3^{\log_3 5}$

Решение. Используя формулу $\log_p a - \log_p b = \log_p \frac{a}{b}$, основное логарифмическое

тождество $a^{\log_a b} = b$, а затем равенство $\log_a a = 1$, получаем:

$$\log_3 15 - \log_3 5 + 3 \cdot 3^{\log_3 5} = \log_3 3 + 5 = 1 + 5 = 6.$$

Ответ: 3.

Пример 3. Вычислите: $\log_3 36 - 2 \log_3 2$.

Решение. Первый способ.

$$\log_3 36 - 2 \log_3 2 = \log_3 (3^2 \cdot 2^2) - 2 \log_3 2 = \log_3 3^2 + \log_3 2^2 - 2 \log_3 2 = 2 \log_3 3 + 2 \log_3 2 - 2 \log_3 2 = 2 \cdot 1 = 2$$

Второй способ.

$$\log_3 36 - 2 \log_3 2 = \log_3 36 - \log_3 2^2 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = 2$$

Ответ: 2.

Пример 4. Найдите $\log_{0,3} 7,5$, если $\log_{0,3} 5 = a$.

Решение. Представим число 7,5 как произведение степеней с основаниями 5 и 0,3:

$$7,5 = 25 \cdot 0,3 = 5^2 \cdot 0,3 \text{ Найдём } \log_{0,3} 7,5, \text{ используя свойства логарифмов}$$

$$\log_{0,3} 7,5 = \log_{0,3} (5^2 \cdot 0,3) = \log_{0,3} 5^2 + \log_{0,3} 0,3 = 2 \log_{0,3} 5 + 1 = 2a + 1$$

Ответ: $2a + 1$.

Логарифмические уравнения

Пример 1. Найдите произведение корней уравнения $\log_{\pi}(x^2 + 0,1) = 0$.

Решение. По определению логарифма получаем $x^2 + 0,1 = \pi^0$, т. е. $x^2 + 0,1 = 1$, откуда $x^2 = 0,9$.
Итак, $x_{1,2} = \pm\sqrt{0,9}$, $x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{0,9} = -0,9$.

Ответ: - 0,9.

Пример 2. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_5(2x) = \log_5 36 - \log_5 4$?
1) $[0; 4]$; 2) $(4; 10]$; 3) $[10; 18]$; 4) $(18; 24]$.

Решение. Используя свойство логарифмов, Получаем: $\log_5(2x) = \log_5 \frac{36}{4}$, или $\log_5(2x) = \log_5 9$. Полученное уравнение равносильно уравнению $2x = 9$, следовательно, $x = 4,5$. Т. к. $4,5 \in (4; 10)$, верный ответ №2

Ответ: 2.

Пример 3. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_{0,4}(5 - 2x) - \log_{0,4} 2 = 1$.

1) $(-\infty; -2]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $[1; 2]$; 4) $(2; +\infty)$.

Решение. $\log_{0,4}(5 - 2x) - \log_{0,4} 2 = \log_{0,4} \frac{5 - 2x}{2}$ т. к. $\log_{0,4} \frac{5 - 2x}{2} = 1$, то $\frac{5 - 2x}{2} = 0,4$

$$\frac{5 - 2x}{2} = \frac{2}{5}; \quad 25 - 10x = 4; \quad -10x = -21 \quad x = 2,1$$

Ответ: 4.

Пример 4. Найдите сумму корней уравнения $\lg(4x - 3) = 2\lg x$.

Решение. Уравнение $\lg(4x - 3) = 2\lg x$ равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 3 = x^2, \\ x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

$4x - 3 = x^2 \quad x^2 - 4x + 3 = 0; x_1 = 1, x_2 = 3; 1 > \frac{3}{4}, 3 > \frac{3}{4}$, значит, числа 1 и 3 — корни исходного уравнения; $1 + 3 = 4$.

Ответ: 4.

Показательные уравнения

Пример 1. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $25^{3-x} = \frac{1}{5}$

1) $(0; 1)$; 2) $(1; 2)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(3; 4)$.

Решение. Используя свойство степени $(a^x)^y = a^{xy}$, получаем:

$$25^{3-x} = (5^2)^{3-x} = 5^{2(3-x)}$$

Так как $\frac{1}{5} = 5^{-1}$, то $5^{2(3-x)} = 5^{-1}$ Степени с одинаковым основанием равны, значит, равны их показатели: $2(3 - x) = -1; 6 - 2x = -1, -2x = -7, x = 3,5$

Поскольку $3,5 \in (3; 4)$, верным является ответ №4.

Ответ: 4.

Пример 2. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения

$$2^{x-1} + 2^{x+1} = 20.$$

$$1) (4; 5); \quad 2) [3; 4]; \quad 3) (2; 3); \quad 4) [1; 2].$$

Решение. $2^{x-1} + 2^{x+1} = 20$; $\frac{2^x}{2} + 2 \cdot 2^x = 20$; $2^x + 4 \cdot 2^x = 40$; $5 \cdot 2^x = 40$; $2^x = 8$; $x = 3$;
 $x \in [3; 4]$.

Ответ: 2.

Пример 3. Найдите произведение корней уравнения $3^{x^2-1} = 243$.

Решение. $3^{x^2-1} = 243$; $3^{x^2-1} = 3^5$; $x^2 - 1 = 5$;

Первый способ

$$x^2 = 6; \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{6}$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = -6$$

Второй способ

$$x^2 - 6 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = -6 \text{ (по теореме Виета)}$$

Ответ: 1

Формулы дифференцирования основных функций (Производные).

$$1) (x^m)' = m x^{m-1}$$

$$2) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3) \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$4) (e^x)' = e^x$$

$$5) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$7) (\log x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8) (\sin x)' = \cos x$$

$$9) (\cos x)' = -\sin x$$

$$10) (\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$11) (\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$12) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$13) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Правила дифференцирования общих функций

$$1) (c)' = 0, (Cu)' = Cu;$$

$$3) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$2) (u + v)' = u' + v'$$

$$4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

Вычислить производные

$$\begin{array}{llll} \text{Пример 1.} & (x^6)' = 6x^5; & (x^7)' = 7x^6; & (x^{11})' = 11x^{10}; \\ \text{Пример 2.} & (x^{-2})' = -2x^{-3} & (x^{-3})' = -3x^{-4} & (x^{-4})' = -4x^{-5}; \end{array} \quad \begin{array}{l} (x^{13})' = 13x^{12} \\ (x^{-7})' = -7x^{-8} \end{array}$$

Пример 3. $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(x^{-\frac{2}{7}}\right)' = -\frac{2}{7} \cdot x^{-\frac{9}{7}}$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \quad \left(x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}$$

Пример 4. 1) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$ 2) $\left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' = -9x^{-10} = -\frac{9}{x^{10}}$

3) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ 4) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ 6) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^2}}$

Пример 5.

1) $(3x^2 - 5x - 5)' = 6x - 5$; 4) $(x^5 - 3x^2)' = 5x^4 - 6x$ 7) $(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1)' = 6x^2 - 6x + 6$
 2) $(5x^2 + 6x - 7)' = 10x + 6$; 5) $(x^3 + 5x)' = 3x^2 + 5$ 8) $(-3x^3 + 2x^2 - x - 5)' = -9x^2 - 4x - 1$
 3) $(x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x$ 6) $(-2x^3 + 18x)' = -6x^2 + 18$

Пример 6.

1) $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$; $f'(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2$; $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$
 2) $f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$; $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 = -2$; $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10$
 3) $f'(x) = (-x^3 - x^2)' = -3x^2 - 2x$; $f'(0) = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$; $f'(2) = -3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = -12 - 4 = -16$
 4) $f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$; $f'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; $f'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

Пример 7.

1) $((4x - 3)^2)' = 2 \cdot (4x - 3) \cdot 4 = 8(4x - 3)$ 4) $((2 - 5x)^4)' = 4(2 - 5x)^3 \cdot (-5) = -20(2 - 5x)^3$
 2) $((5x + 2)^{-3})' = -3(5x + 2)^{-4} \cdot 5 = -15(5x + 2)^{-4}$ 5) $((2x)^3)' = 3 \cdot (2x)^2 \cdot 2 = 6(2x)^2 = 24x^2$
 3) $((1 - 2x)^{-6})' = -6(1 - 2x)^{-7} \cdot (-2) = 12(1 - 2x)^{-7}$ 6) $((-5x)^4)' = 4(-5x)^3 \cdot (-5) = -20(-5x)^3 = 2500x^3$

Применение производной

Пример 8. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $y(x) = 4x^2 - 8x + 5$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0)$. $y'(x) = (4x^2 - 8x + 5)' = 4 \cdot 2x - 8 = 8x - 8$ $y'(x_0) = y'(0) = 8 \cdot 0 - 8 = -8$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = -8$

Пример 9. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. $f'(x) = (3x^2 + 5x - 1)' = 3 \cdot 2x + 5 = 6x + 5$ $f'(x_0) = f'(1) = 6 \cdot 1 + 5 = 11$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 11$

Пример 10. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{x^2}$ в точке $x_0 = -2$.

Решение. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$. $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3}$ $f'(x_0) = f'(-2) = -2 \cdot (-2)^{-3} = \frac{-2}{(-2)^3} =$

$= \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ *Ответ:* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}$

Пример 11. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + x + 1$ в точке $x_0 = 5$

Решение. Общий вид уравнения касательной имеет вид $y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Найдем значение функции в указанной точке $y_0 = f(x_0) = f(5) = 5^2 + 5 + 1 = 31$

Производная функции $f'(x) = 2x + 1$. Значение производной в точке x_0 равно $f'(x_0) = 2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Составим уравнение касательной $y = 31 + 11(x - 5) = 31 + 11x - 55 = 11x - 24$

Ответ: $y = 11x - 24$

Пример 12. Составить уравнение касательной к графику функции $y(x) = x - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 4$

Решение. Общий вид уравнения касательной имеет вид $y = y_0 + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Значение функции в указанной точке $y_0 = y(x_0) = y(4) = 4 - 3 \cdot 4^2 = -44$

Производная функции $y'(x) = 1 - 6x$. Значение производной в точке x_0 равно $y'(x_0) = 1 - 6 \cdot 4 = -23$.

Составим уравнение касательной $y = -44 - 23(x - 4) = -44 - 23x + 92 = 48 - 23x$

Ответ: $y = 48 - 23x$

Пример 13. Составить уравнение касательной к графику функции $y(x) = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$

Решение. Значение функции в указанной точке $y_0 = y(x_0) = y(1) = \sqrt{1} = 1$. Производная функции $y'(x)$

$= (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Значение производной в точке x_0 равно $y'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$. Искомое уравнение

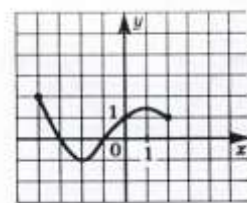
касательной $y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}x$

Ответ: $y = 2 - \frac{1}{2}x$

Область определения функции

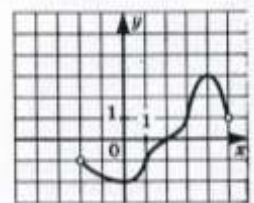
1. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) $[-4; -3] \cup (-1; 2]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $(-3; -1)$; 4) **$[-4; -2]$**



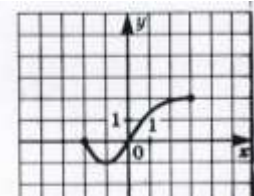
2. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) **$(-2; 5]$** ; 2) $[-2; 3]$; 3) $(2; 5)$; 4) $(-2; 1]$



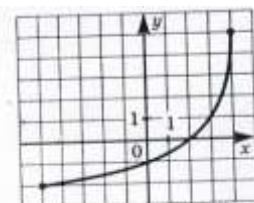
3. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) $[-2; 2]$; 2) $[-1; 2)$; 3) $[-1; 3]$; 4) **$[-2; 3]$**



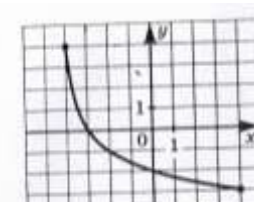
4. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) **$[-5; 4]$** ; 2) $[-2; 5]$; 3) $[-5; 2) \cup (2; 4]$; 4) $(-5; 4)$.



5. Функция задана графиком. Укажите область определения этой функции.

- 1) $[-3; 0]$; 3) $(-4; -3]$; 2) **$[-4; 4]$** ; 4) $[-3; 4]$.



Область значений функции

Пример 1. Найдите область значений функции $f(x) = -5 \cos x$

- 1) $[-1; 1]$; 2) $[1; 5]$; 3) $[-5; 1]$; 4) $[-5; 5]$.

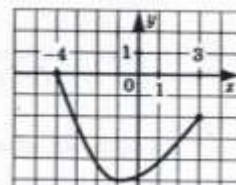
Решение. Областью значений функции $y = \cos x$ является Промежуток $[-1; 1]$, т. е. $-1 \leq \cos x \leq 1$. Умножая все члены неравенства на -5 и меняя знак неравенства на противоположный, Получаем: $-5 \leq -5 \cos x \leq 5$

Ответ: 4.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-4; 3]$.

Укажите область ее значений.

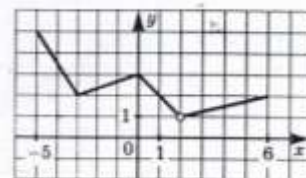
- 1) $(0; 2]$; 2) $[-5; 0]$; 3) $(-2; 0)$; 4) $[-4; -3]$.



Пример 3. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке $[-5; 6]$.

Укажите область ее значений.

- 1) $[2; 5]$; 2) $(2; 5)$; 3) $(1; 5]$; 4) $[1; 5]$.



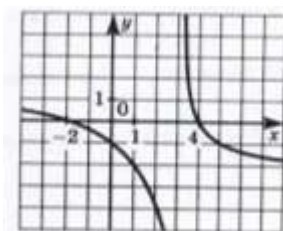
Нули функции

Пример 1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, найдите все нули функции.

- 1) -2 и 4; 2) -2 и 0; 3) -1 и 4; 4) -2 и -1.

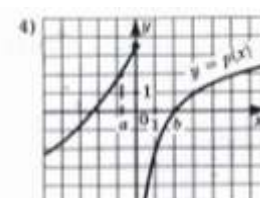
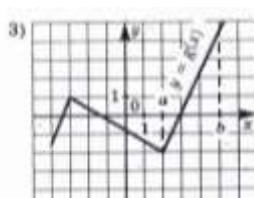
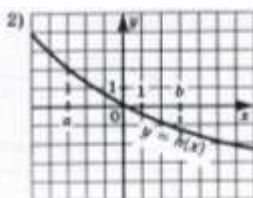
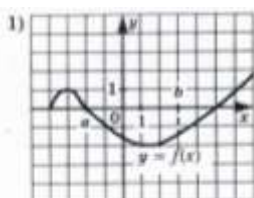
Решение. Нули функции — абсциссы точек пересечения графика с осью Ox . На рисунке это точки -2 и 4.

Ответ: 1.



Возрастание, убывание функции

Пример 2. Какая из функций заданных графиком возрастает на промежутке $[a; b]$?

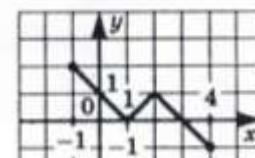


Ответ: 3

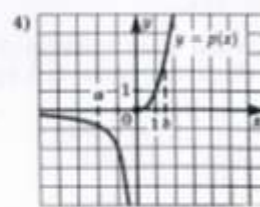
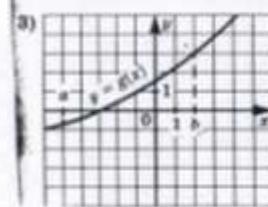
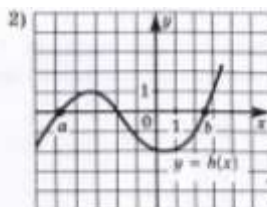
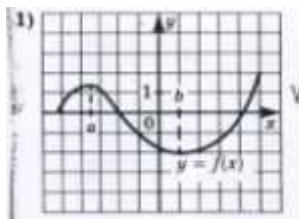
Пример 3. Функция $y = f(x)$, задана графиком на отрезке $[-1; 4]$.

Укажите промежуток, на котором эта функция возрастает.

- 1) $[0; 1]$; 2) $[1; 2]$; 3) $[-1; 2]$ 4) $(-1; 0)$.



Пример 4. Какая из функций заданных графиком возрастает на

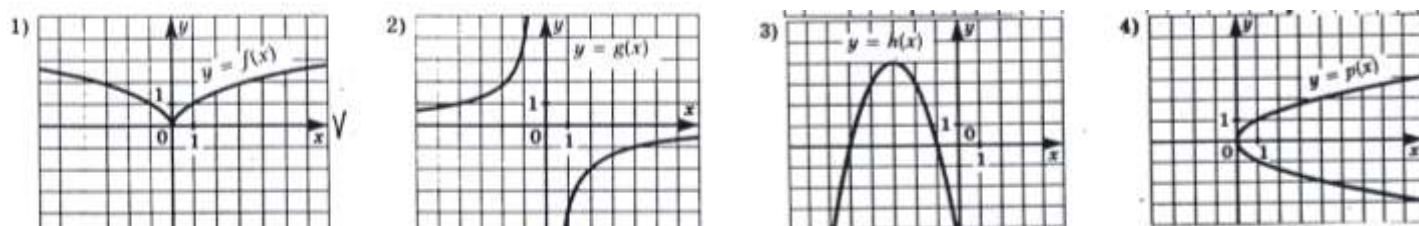


промежутке $[a; b]$?

Ответ: 3

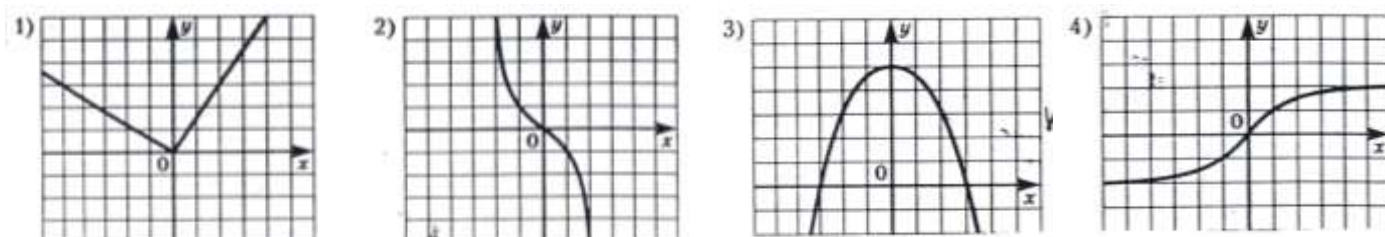
Четные и нечетные функции

Пример 1. Укажите рисунок, на котором изображен график четной функции.



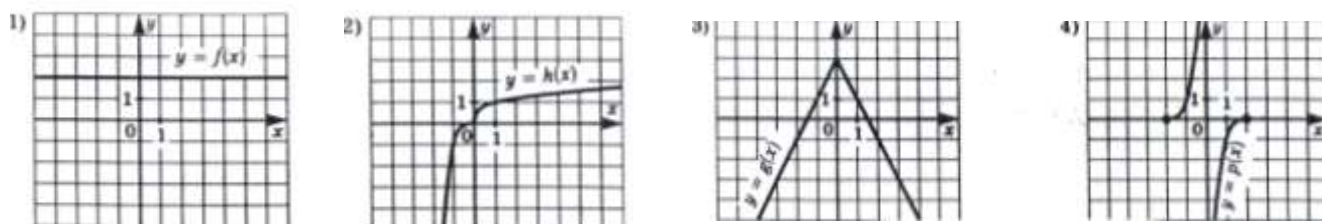
Ответ: 1

Пример 2. Укажите график четной функции



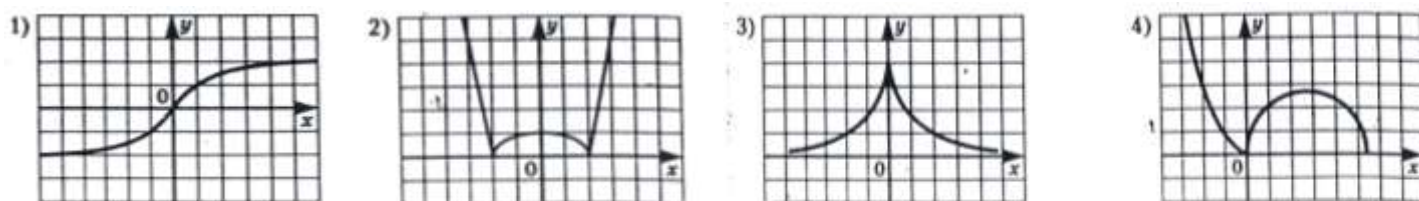
Ответ: 3

Пример 3. Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.



Ответ: 4

Пример 4. Укажите рисунок, на котором изображен график нечетной функции.



Ответ: 1