ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Данное пособие ставит своей целью оказание помощи учащимся МБОУ СОШ № 57 (СП ВСОШ) в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков в объеме действующей программы.

Эта работа требует не только большого упорства, но и умения, без которого затрата сил и времени не дает должного эффекта. Читать, понимать прочитанное и применять его практически – вот в чем суть умения работать с учебными пособиями.

Некоторые практические советы. Прежде всего необходимо ознакомиться с содержанием программы. Затем следует выбрать в качестве основного учебное пособие и придерживаться его при изучении всей части курса, так как замена учебника может привести к утрате логической связи между отдельными вопросами.

Конспекты по математике главным образом должны содержать определения, чертежи и выводы основных формул. Записи должны быть аккуратными. Не нужно забывать, что они делаются для того, чтобы впоследствии ими пользоваться.

Учитесь самоконтролю. Это важнейшая форма проверки правильности понимания и усвоения материала.

Помните: учебник нужно не просто читать, а изучать; основой запоминания является понимание, знание забывается – понимание никогда; повторение – важнейшее средство, предотвращающее забывание; необходимо выработать привычку систематической самостоятельной работы, «натаскивание» к экзамену дает слабые и поверхностные знания.

О решении задач. Решение задач является лучшим способом закрепления материала. Конечно, общих рецептов для решения разнообразных задач не существует, однако рекомендуем придерживаться следующих советов:

1. Величины, данные в условии задачи, необходимо перевести в одну систему единиц; нарушение этого правила является распространенным источником ошибок у учащихся.
2. Внимательно изучите цель, поставленную в задаче; выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом или с некоторыми ее элементами.
3. Не следует приступать к решению задачи, не обдумав условия и не найдя плана решения.
4. Попытайтесь соотнести данную задачу к какому–либо типу задач, способ решения которых вам известен.
5. Если не видно сразу хода решения, то последовательно отвечайте на вопросы: что дано; что нужно найти; достаточно ли данных, чтобы найти неизвестное, и т. п.
6. Попробуйте расчленить данную задачу на серию вспомогательных, последовательное решение которых может составить решение данной задачи.
7. Найдя план решения, выполните его, убедитесь в необходимости и правильности каждого шага, произведите проверку решения и, если нужно, его исследование.
8. Подумайте, нельзя ли было решить задачу иначе; известно, что одна и та же задача может иметь несколько решений, поэтому следует выделить наиболее рациональное.
9. Если решить задачу не удается, отыщите в учебной (или популярной) литературе уже решенную задачу, похожую на данную, изучите внимательно это «готовое» решение и постарайтесь извлечь из него пользу для решения своей задачи.

Контрольные работы следует выполнять самостоятельно и лишь после того, как проработан соответствующий теоретический материал и решен необходимый минимум задач. Так как каждой теме соответствует задача или упражнение, то контрольную работу следует выполнять постепенно по мере изучения материала.

При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Не следует применять формулы, которые не входят в программу. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

Литература

Основная

1. Алгебра и начала анализа /Под ред. Ю. М. Колягин, 2014 г
2. Геометрия /Под ред Атанасян . М.,2011
3. Брадис В. М. Четырехзначные математические таблицы (любое издание).

Производная и ее приложения.

Производная. Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x + \Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x) + \Delta y = f(x + \Delta x)$, т.е. функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

называется *производной* функции $y = f(x)$ по аргументу x в точке x.

Производная обозначается одним из символов: $y'_x, \quad y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}$, а ее значение при $x = x_0$ обозначается

$$y'(x_0), \quad f'(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка X, то говорят, что эта функция *дифференцируема на* этом *промежутке*.

Производная сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной x: $u = \varphi(x)$. Таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

В этом случае функция y называется *сложной функцией* x, а переменная u *– промежуточным аргументом*.

Производная сложной функции находится на основании следующей теоремы: *если* $y = f(x)$ *и* $u = \varphi(x)$ *– дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$ *существует и равна произведению производной функции* y *по промежуточному аргументу* u *на производную промежуточного аргумента* u *по независимой переменной* x*:* $y'_x = y'_u u'_x$.

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепочки, содержащей три звена и более.

Например, если $y = f(u), \quad u = \varphi(v), \quad v = \psi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(\psi(x)))$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x$.

Формулы дифференцирования. Во всех приведенных ниже формулах буквами u и v обозначены дифференцируемые функции независимой переменной x: $u = u(x), \quad v = v(x)$, а буквами a, c, n –постоянные:

1. $c' = 0.$
2. $x' = 1.$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'.$
4. $(uv)' = uv' + vu'.$
5. $(cu)' = cu'.$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$

Остальные формулы записаны как для функций независимой переменной, так и для сложных функций:

7. $(x^n) = nx^{n-1}.$
7а. $(u^n)' = nu^{n-1}u'.$
8. $\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}.$
8а. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}.$

9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

9a. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

10. $(\sin x)' = \cos x.$

10a. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$

11. $(\cos x)' = -\sin x.$

11a. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$

12. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

12a. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$

13. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

13a. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$

При решении приведенных ниже примеров сделаны подробные записи. Однако следует научиться дифференцировать без промежуточных записей.

Вычислить производные

Пример 1. $(x^6)' = 6x^5$; $(x^7)' = 7x^6$; $(x^{11})' = 11x^{10}$; $(x^{13})' = 13x^{12}$

Пример 2. $(x^{-2})' = -2x^{-3}$ $(x^{-3})' = 3x^{-4}$ $(x^{-4})' = -4x^{-5}$ $(x^{-7})' = -7x^{-8}$

Пример 3. $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(x^{-\frac{2}{7}}\right)' = -\frac{2}{7} \cdot x^{-\frac{9}{7}}$

$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$ $\left(x^{\sqrt{3}}\right)' = \sqrt{3} \cdot x^{\sqrt{3}-1}$

Пример 4. 1) $\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = (x^{-5}) = -5x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$ 2) $\left(\frac{1}{x^9}\right)' = (x^{-9})' = -9x^{-10} = \frac{-9}{x^{10}}$

3) $\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ 4) $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

5) $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ 6) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-1\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^2}}$

Пример 5.

1) $(3x^2 - 5x - 5)' = 6x - 5$;

2) $(5x^2 + 6x - 7)' = l0x + 6$;

3) $(x^4 - 2x^2)' = 4x^3 + 4x$

4) $(x^5 - 3x^2)' = 5x^4 - 6x$

5) $(x^3 + 5x)' = 3x^2 + 5$

6) $(-2x^3 + 18x)' = -6x^2 + 18$;

7) $(2x^3 - 3x^2 + 6x + 1)' = 6x^2 - 6x - 6$

8) $(-3x^3 + 2x^2 - x - 5)' = -9x^2 - 4x - 1$.

Пример 6.

1) $f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2$; $f'(0) = 2\cdot 0 - 2 = -2$: $f'(2) = 2\cdot 2 - 2 = 2$

2) $f'(x) = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$; $f'(0) = 3\cdot(0)^2 - 2 = -2$; $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 2 = 12 - 2 = 10$

3) $f'(x) = (-x^3 - x^2)' = -3x^2 + 2x$; $f'(0) = 3\cdot 0 - 2\cdot 0 = 0$; $f'(2) = -3\cdot 2^2 - 2\cdot 2 = -12 + 4 = -8$

4) $f'(x) = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1$; $f'(0) = 2\cdot 0 + 1 = 1$; $f'(2) = 2\cdot 2 + 1 = 5$

Пример 7.

1) $((4x - 3)^2)' = 2\cdot(4x - 3)\cdot 4 = 8(4x - 3)$

2) $((5x+2)^{-3})' = -3(5x+2)^{-4}\cdot 5 = -15(5x+2)^{-4}$

3) $((1 - 2x)^{-6})' = -6(1 - 2x)^{-7}\cdot(-2) = 12(1 - 2x)^{-7}$

4) $((2 - 5x)^4)' = 4(2 - 5x)^3\cdot(-5) = -20(2-5x)^3$

5) $((2x)^3)' = 3\cdot(2x)^2\cdot 2 = 6(2x)^2 = 24x^2$

6) $((-5x)^4)' = 4(-5x)^3\cdot(-5) = -20\cdot(-5x)^3 = 2500x^3$

Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 2x + \frac{3}{x}.$

Решение. Данная функция есть алгебраическая сумма функций. Дифференцируем ее, используя формулы 3,5,7 и 8:

$$y' = (5x^3)' - (2x)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = 5(x^3)' - 2x' - \frac{3}{x^2} = 5 \cdot 3x^2 - 2 - \frac{3}{x^2} = 15x^2 - 2 - \frac{3}{x^2}.$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$

Решение. Применяя формулы 6, 3, 7 и 1, получим

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x^2)' - (x^2+1)'x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - 2x \cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \sin^3 \varphi$ и вычислить ее значение при $\varphi = \pi/3$.

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом $\sin\varphi$. Используя формулы 7а и 10, имеем $f'(\varphi) = 3\sin^2 \varphi (\sin\varphi)' = 3\sin^2 \varphi \cos\varphi.$

Вычислим значение производной при $\varphi = \pi/3$:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin^2 \frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = 3\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

Геометрический смысл производной. Производная функции имеет простую и важную геометрическую интерпретацию.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то график этой функции имеет в соответствующей точке касательную, причем угловой коэффициент касательной равен значению производной в рассматриваемой точке.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0 y_0)$, равен значению производной функции при $x = x_0$, т.е. $k_{kac} = y'(x_0)$.

Уравнение этой касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 8. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2x + 3$ в точке $A(3, 6)$.

Решение. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную данной функции:

$$y' = \frac{2}{3}3x^2 - 2x - 2 = 2x^2 - 2x - 2.$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 3$:

$$k = y'(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 18 - 6 - 2 = 10.$$

Уравнение касательной имеет вид

$$y - 6 = 10(x - 3), \text{ или } y - 6 = 10x - 30, \text{ т.е. } 10x - y - 24 = 0.$$

Пример 9. Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = \dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точке с абсциссой $x = 2.$

Решение. Сначала найдем ординату точки касания $A(2, y)$. Так как точка A лежит на кривой, то ее координаты удовлетворяют уравнению кривой, т.е.

$$y = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2 - 3} = \frac{6-4}{4-3} = \frac{2}{1} = 2; \quad A(2, 2).$$

Уравнение касательной, проведенной к кривой в точке $A(2, 2)$, имеет вид $y - 2 = k(x - 2)$. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную:

$$y' = \frac{(2x-3)(3x-4)' - (2x-3)'(3x-4)}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3) \cdot 3 - 2(3x-4)}{(2x-3)^2} = \frac{6x-9-6x+8}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 2$:

$$k = y'(2) = -\frac{1}{(2^2-3)^2} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Уравнение касательной таково:

$$y - 2 = -(x - 2), \quad y - 2 = -x + 2, \text{ т.е. } x + y - 4 = 0.$$

Физический смысл производной. Если тело движется по прямой по закону $s = s(t)$, то за промежуток времени Δt (от момента t до момента $t + \Delta t$) оно пройдет некоторый путь Δs. Тогда $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость движения за промежуток времени Δt.

Скоростью движения тела в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Следовательно, производная пути s по времени t равна скорости прямолинейного движения тела в данный момент времени:

$$v(t) = s'_t.$$

Скорость протекания физических, химических и других процессов также выражается с помощью производной.

Производная функции $y = f(x)$ равна скорости изменения этой функции при данном значении аргумента x:

$$v(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример 10. Закон движения точки по прямой задан формулой $s = 5t^3 - 3t^2 + 4$ (s – в метрах, t – в секундах). Найти скорость движения точки в конце первой секунды.

Решение. Скорость движения точки в данный момент времени равна производной пути s по времени t:

$$v(t) = s' = 15t^2 - 6t, \quad v(1) = 15 - 6 = 9.$$

Итак, скорость движения точки в конце первой секунды, равна 9 м/с.

Пример 11. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, где v_0 – начальная скорость, g – ускорение свободного падения тела. Найти скорость этого движения для любого момента времени t. Сколько времени будет подниматься тело и на какую высоту оно поднимется, если v_0 *= 40 м/с*?

Решение. Скорость движения точки в данный момент времени t равна производной пути s по времени t:

$$v(t) = s' = v_0 - \frac{1}{2} g \cdot 2t = v_0 - gt.$$

В высшей точке подъема скорость тела равна нулю:

$$v_0 - gt = 0, \quad gt = v_0, \quad t = v_0 / t, \quad t = 40 / g \approx 4{,}1 \quad t = 4{,}1\, c.$$

За $40/g$ секунд тело поднимется на высоту

$$s = 40 \frac{40}{g} - \frac{1}{2} g \frac{1600}{g^2} = \frac{1600}{g} - \frac{800}{g} = \frac{800}{g} \approx 81{,}5, \quad s \approx 81{,}5 \text{ м}.$$

Физический смысл второй производной. Если тело движется прямолинейно по закону $s = s(t)$, то вторая производная пути s по времени t равна ускорению движения в данный момент времени t:

$$a(t) = v' = s''.$$

Таким образом, первая производная характеризует скорость некоторого процесса, а вторая производная – ускорение того же процесса.

Пример 14. Точка движется по прямой по закону $s = t - \sin t$. Найти скорость и ускорение движения при $t = \pi/2$.

Решение. Скорость движения тела в данный момент времени равна производной пути s по времени t, а ускорение – второй производной пути s по времени t. Находим:

$$v(t) = s' = 1 - \cos t \text{; тогда } v\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\frac{\pi}{2} = 1;$$

$$a(t) = s'' = -(-\sin t) = \sin t \text{; тогда } a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Пример 15. Скорость прямолинейного движения пропорциональна квадратному корню из пройденного пути (как, например, при свободном падении). Доказать что это движение происходит под действием постоянной силы.

Решение. По закону Ньютона, сила F , вызывающая движение, пропорциональна ускорению, т.е.

$$F = ka(t) \text{ или } F = ks''(t).$$

Согласно условию, $v(t) = s'(t) = \lambda\sqrt{s}$. Дифференцируя это равенство, найдем

$$a(t) = s''(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} s'(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \lambda\sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Следовательно, действующая сила $F = k\lambda^2/2 = const$.

Приложения производной к исследованию функций.

Условие постоянства функции. *Дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *постоянна на промежутке* X *тогда и только тогда, когда* $f'(x) = 0$ *внутри* X .

0

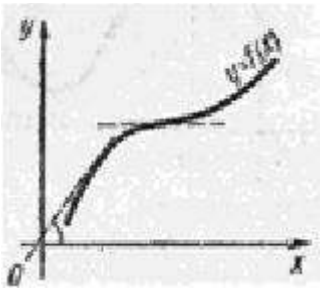

Рис. 5

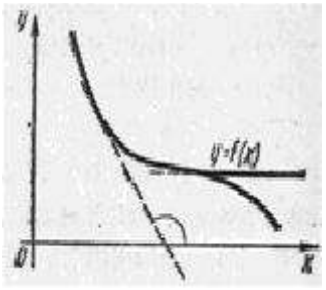

Рис. 6

Условие возрастания функции. *Дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *монотонно возрастает на промежутке* X *тогда и только тогда, когда ее производная не отрицательна внутри этого промежутка:* $f'(x) \geq 0$, *причем производная* $f'(x)$ *обращается в нуль в конечном числе точек, лежащих внутри промежутка* X .

Это условие геометрически означает, что касательная к графику монотонно возрастающей функции образует с положительным направлением оси Ox острый угол или параллельна ей. (рис. 5).

Условие убывания функции. *Дифференцируемая функция* $y = f(x)$ *монотонно убывает на промежутке* X *тогда и только тогда, когда ее производная не положительна внутри этого промежутка:* $f'(x) \leq 0$, *причем производная* $f'(x)$ *обращается в нуль в конечном числе точек, лежащих внутри* X .

Это условие геометрически означает, что касательная к графику монотонно убывающей функции образует с положительным направлением оси Ox тупой угол или параллельна ей (рис. 6).

Экстремумы функции. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *максимум* в точке x_1 (рис. 7), если значение функции в этой точке больше, чем ее значения во всех точках,, достаточно близких к x_1, т.е. если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ для любых Δx , как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_1$ – точка максимума, а $y_{\max} = f(x_1)$ – максимум функции.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *минимум* в точке x_2 (рис. 7), если значение функции в этой точке меньше, чем ее значение во всех точках, достаточно близких к x_2, т.е. если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ для любых Δx, как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю. Таким образом, $x = x_2$ – точка минимума, а $y_{\min} = f(x_2)$ – минимум функции.

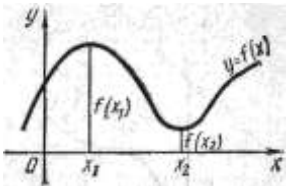

Рис. 7

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место *экстремум.* Значение функции в этой точке называется *экстремальным.*

Замечание. Следует помнить: 1) что максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией; 2) функция может иметь несколько максимумов или минимумов; 3) функция, определенная на отрезке, может достигать экстремума только во внутренних точках этого отрезка.

Необходимое условие экстремума. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум при* $x = x_0$*, то ее производная в этой точке равна нулю или бесконечности, либо вовсе не существует, при этом сама функция в точке* x_0 *определена.*

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее первая производная равна нулю, или бесконечности, или не существует. Эти точки называются *критическими точками I рода.*

Этот признак экстремума является только необходимым. Поэтому, определив критические точки I рода, надо каждую из них в отдельности исследовать на основании достаточных условий экстремума.

Первое достаточное условие существования экстремума функции. *Пусть точка* $x = x_0$ *является критической точкой I рода функции* $y = f(x)$*, а сама функция дифференцируема во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку (за исключением, возможно, самой точки). Тогда:*

1) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ *первая производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума, т.е.* $x = x_0$ *– точка максимума,* $y_{\max} = f(x_0)$;

2) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ *первая производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума, т.е.* $x = x_0$ *– точка минимума,* $y_{\min} = f(x_0)$;

3) если при переходе через критическую точку I рода первая производная не меняет знака, то в этой точке экстремума нет.

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции и критические точки I рода.
3. Отметить границы области определения и критические точки I рода на числовой прямой.
4. Исследовать знак производной в каждом из полученных интервалов.
5. Выписать точки экстремума и вычислить экстремумы функции.

Пример 16. Найти экстремумы функции $y = (1 - x^2)^3$.

Решение. 1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$.

2. Функция имеет производную всюду, поэтому определяем критические точки из условия $f'(x)=0$. Находим производную:

$$y'=3(1-x^2)^2(1-x^2)'=3(1-x^2)^2(-2x)=-6x(1-x^2)^2;$$

$$y'=0,\ -6x(1-x^2)^2=0,\quad x_1=0,\quad x_2=-1,\quad x_3=1$$

3. Отмечаем эти критические точки на числовой прямой (рис. 8).

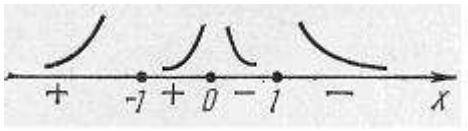

Рис. 8.

4. Исследуем знак производной $y'=-6x(1-x^2)^2$ в каждом из полученных интервалов: $y'(-2)>0,\ y'(-0{,}5)>0,\ y'(0{,}5)<0,\ y'(2)<0$.

5. точка $x=0$ – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: $y_{\max}=y(0)=0$. Точки $x=-1\ и\ x=1$ не являются точками экстремума.

Второе достаточное условие существования экстремума функции. *Если в точке $x=x_0$ первая производная равна нулю $(f'(x_0)=0)$, а вторая производная отличная от нуля, то $x=x_0$* – точка экстремума.

При этом если вторая производная в этой точке положительна $(f''(x_0)>0)$, то $x=x_0$ – точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна $(f''(x_0)<0)$, то $x=x_0$ – точка максимума.

Для исследования функции на экстремум по первой и второй производной следует:

1. Найти область определения функции.

2. Найти первую производную функции и стационарные точки, т. е. точки, в которых она обращается в нуль.

3. Найти вторую производную функции и исследовать ее знак в каждой стационарной точке.

4. Выписать точки экстремума и вычислить (если нужно) экстремумы функции.

Пример 17. Найти экстремумы функции $f(x)=x^3-3x^2+1.$

Решение. 1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x\in R$.

2. Функция имеет производную всюду, поэтому критические точки определяем из условия $f'(x_0)=0$:

$$f'(x)=3x^2-6x,\quad f'(x)=0,\quad 3x^2-6x=0,\quad 3x(x-2)=0,\quad x_1=0,\quad x_2=2.$$

3. Находим вторую производную функции $f''(x)=6x-6$. Исследуем знак второй производной в каждой критической точке: $f''(0)=-6<0$; значит, $x=0$ – точка максимума, $y_{\max}=y(0)=1;$

$f''(2)=6>0$; значит, $x=2$ – точка минимума, $y_{\min}=y(2)=2^3-3\cdot 2^2+1=8-12+1=-3.$

Наибольшее и наименьшее значения функции. *Наибольшим значением* функции называется самое большое, а *наименьшим значением* – самое меньшее из всех ее значений.

Функция может иметь только одно наибольшее значение и только одно наименьшее значение или может не иметь их совсем.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

1) если в некотором открытом промежутке $a < x < b$ (конечном или бесконечном) функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум, то он является наибольшим значением функции, а если минимум – наименьшим значением функции в этом промежутке;

2) если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на концах этого отрезка.

Поэтому, что бы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $a \le x \le b$, где она непрерывна, следует:

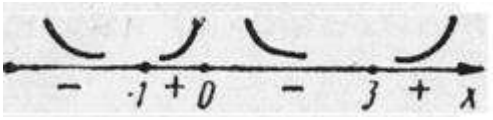

Рис. 9.

1. Найти экстремумы функции на данном отрезке.
2. Найти значения функции на концах отрезка: $f(a)$ u $f(b)$.
3. Из всех найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 18. найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ на отрезке $-2 \le x \le 4$.

Решение. 1. Найдем экстремумы функции, для чего найдем производную функции и критические точки I рода из условия $y' = 0$:

$$y' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 - \frac{2}{3}\cdot 3x^2 - \frac{3}{2}\cdot 2x = x^3 - 2x^2 - 3x = = x\left(x^2 - 2x - 3\right);$$

$$y' = 0 \; при \; x_1 = 0,\; x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac, \quad D = 4 - 4(-3) = 16, \quad x = \left(2 \pm 4\right)/2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3.$$

Отметим критические точки I рода $x = -1,\; x = 0,\; x = 3$ на числовой прямой (рис. 9).

Исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов: $y'(-2) < 0,\; y'(-0{,}5) > 0,\; y'(1) < 0,\; y'(4) > 0$.

Таким образом,

$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 2 = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12};$$

$$y_{\max} = y(0) = 2;$$

$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{4}\cdot 81 - \frac{2}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9 + 2 = = 20\frac{1}{4} - 18 - 13\frac{1}{2} + 2 = -9\frac{1}{4}.$$

2. Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(-2)=\frac{1}{4}\cdot 16+\frac{2}{3}\cdot 8-\frac{3}{2}\cdot 4+2=4+5\frac{1}{3}-6+2=5\frac{1}{3};$$

$$y(4)=\frac{1}{4}\cdot 256-\frac{2}{3}\cdot 64-\frac{3}{2}\cdot 16+2=64-42\frac{2}{3}-24+2=-\frac{2}{3}.$$

3. Итак, наибольшее значение функции $y_{наиб}=y(-2)=5\frac{1}{3}$, а наименьшее значение функции $y_{наим}=y(3)=-9\frac{1}{4}$.

Пример 19. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом $250\pi\ см^3$. Какими должны быть его размеры, что бы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Решение. Здесь требуется определить радиус основания *R* и высоту *H* цилиндра, что бы при заданном объеме площадь его полной поверхности была наименьшей.

Площадь полной поверхности цилиндра вычисляется по формуле:

$$S=2\pi RH+2\pi R^2.$$

Наименьшее значение этой функции и следует определить. Так как *S* является функцией двух независимых переменных, то одну из них надо исключить. Известно, что объем цилиндра $V=\pi R^2H, \text{ или } V=250\pi$. Выразим *H* через *V*:

$$H=\frac{250\pi}{\pi R^2}=\frac{250}{R^2}.$$

Тогда

$$S=2\pi R\frac{250}{R^2}+2\pi R^2,\ S=\frac{500\pi}{R}+2\pi R^2.$$

1. Областью определения функции *S* являются положительные значения радиуса, т.е. $R>0$.
2. Находим производную:

$$S'=-\frac{500\pi}{R^2}+4\pi R;\quad S'=0;\quad при -\frac{500\pi}{R^2}+4\pi R=0,$$

$$4\pi R^3=500\pi,\ R^3=125,\ R=5.$$

3. Находим вторую производную:

$$S''=\frac{500\pi\left(R^2\right)'}{R^4}+4\pi=\frac{500\pi\cdot 2R}{R^4}+4\pi=\frac{1000\pi}{R^3}+4\pi.$$

Так как $S''(5)>0$, то при $R=5$ имеет место минимум функции *S*, который и является наименьшим значением функции *S*. Тогда $H=250/R^2,$ или $H=250/25=10$.

Итак, на изготовление цилиндрического бака пойдет наименьшее количество материала, если длина радиуса основания цилиндра равна 5см, а высота цилиндра 10см.

Пример 20. Требуется изготовить ящик с крышкой, стороны основания которого относятся как 1:2, а площадь поверхности $108\ см^2$. Какими должны быть его размеры, что бы его объем был наибольшим?

Решение. Здесь требуется определить стороны основания *a* и *b* и высоту *H* прямоугольного параллелепипеда, что бы заданной площади полной поверхности его объем был наибольшим.

Из условия, $a:b=1:2$, откуда $a=x, b=2x$. Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V=abH$ или $V=2x^2H$. Надо исключить переменную *H*. Известно, что $S=108$ *и* $S=2S_{осн}+S_{бок}$ $S_{бок}=P_{осн}\cdot H$. Имеем:

$$S=2x\cdot 2x+(x+2x)\cdot 2H=4x^2+6xH,\quad 4x^2+6xH=108,$$

$$6xH=108-4x^2,\quad H=\frac{108-4x^2}{6x}=\frac{108}{6x}-\frac{4x^2}{6x}=\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x.$$

Тогда

$$V=2x^2\left(\frac{18}{x}-\frac{2}{3}x\right)=36x-\frac{4}{3}x^3.$$

Наибольшее значение этой функции и следует определить.

1. Областью определения функции *V* являются положительные значения *x*, т.е. $x>0$.
2. Находим производную:

$$V'=36-\frac{4}{3}\cdot 3x^2=36-4x^2;\ V'=0 \text{ при } 4x^2=36,\quad x^2=9,\ x=3.$$

3. Находим вторую производную: $V''=-8x; V''(3)<0$, т.е. $x=3$ функция имеет максимум, который и служит наибольшим значением функции. При этом:

$$H=\frac{18}{3}-\frac{2}{3}\cdot 3=6-2=4.$$

Итак, объем ящика является наибольшим, если стороны его основания имеют длину 3 и 6см, а высота 4см.

Пример 21. Число 10 разбить на два положительных слагаемых так, что бы сумма их кубов была наименьшей.

Решение. Пусть одно из слагаемых равно x, тогда другое слагаемое есть $10-x$. Сумма кубов этих слагаемых равна

$$S=x^3+(10-x)^3=x^3+1000-300x+30x^2-x^3,\ S=30x^2-300x+1000.$$

Наименьшее значение этой функции и надо определить.

1. Областью определения функции S являются положительные значения x, т.е. $x>0$.
2. Находим производную:

$$S'=30\cdot 2x-300=60x-300;\ S'=0 \text{ при } 60x-300=0,\ 60x=300,\ x=5.$$

3. Находим вторую производную: $S''=60;\quad S''(5)>0,$ т.е. при $x=5$ функция S имеет минимум, который и является наименьшим значением функции.

Итак, число 10 надо разложить на два равных слагаемых: 5 и 5.

Пример 22. Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S=-t^3+9t^2-24t-8$ (S – в метрах, t – в секундах). Найти максимальную скорость движения тела.

Решение. Скорость движения тела в данный момент времени равна производной пути S по времени t:

$$V(t) = S' = -3t^2 + 18t - 24.$$

Исследуем эту функцию на экстремум с помощью второй производной: $V'(t) = -6t + 18$, $V''(t) = -6$. Вторая производная отрицательна; следовательно, скорость является наибольшей при $t = 3$.

Максимальная скорость движения составляет:

$$V(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 24 = -27 + 54 - 24 = 3, V_{\max} = 3 \text{ м/с}.$$